ÁLGEBRA III - PRÁCTICO 5 (ADICIONAL)

1. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales. Determinar la forma racional del operador lineal $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definido por $T(f) = f + f'$.

2. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales. Sea $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Determinar la forma racional del operador lineal $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definido por $T(f(X)) = f(X - c)$.

3. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^6$ representado en la base ordenada canónica por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   a) Dar una base de Jordan para T.
   b) Determinar los factores invariantes de T.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.
   a) Determinar la forma de Jordan J de A.
   b) Hallar una matriz inversible P tal que $P^{-1}JP = A$.
   c) Dar una fórmula explícita para la matriz A^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. Resolver los ítems a) y b) del ejercicio anterior para las siguientes matrices:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Sea A una de las matrices (reales) de los ejercicios 4) y 5).
   a) Determinar los factores invariantes de A.
   b) Dar la forma racional de A.

7. Sea $c \in \mathbb{C}$ y sea $A_c \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ la matriz dada por
$$A_c = \begin{pmatrix} -1 & c & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Hallar, para cada $c \in \mathbb{C}$, la forma racional de A_c.
   b) Hallar, para cada $c \in \mathbb{C}$, la forma de Jordan de A_c y encontrar una matriz inversible P tal que $P^{-1}A_cP$ esté en la forma de Jordan.